Split, Republika Hrvatska, 15. travnja 2026.

prof. dr. sc. Dario Ban

Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Splitu

OPĆI INTEGRAL SVOJSTAVA POVRŠINE ORUBLJENE KRIVULJOM

<u>Diskretni vektorski umnožak</u>

Zadan je opći zatvoreni poligon D.

Skup točaka općeg poligona koji tvori krivulju koja ga omeđuje je: $\{x_i\}$, $\{y_i\}$, $i = 1, ..., N$

Na poligonu D se mogu formirati trokuti A_i s:

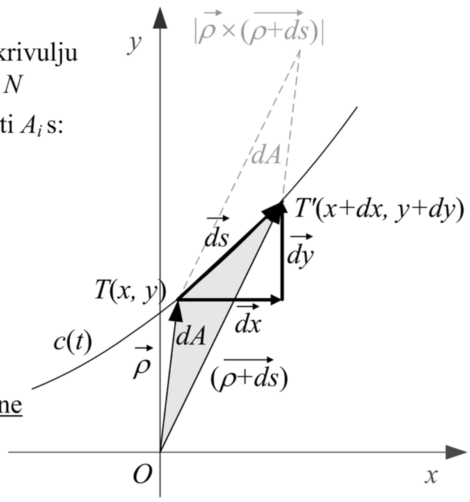
$A = \Sigma_i A_i$.

Zadani su diskretni vektori:

$\rho_i = \rho(x_i, y_i)$, $i = 1, ..., N + 1$

Tad je površina trokuta i jednaka:

$A_i = |1/2(\rho_i \times \rho_{i+1})|$



<u>Numerička integracija svojstava površine</u>

Indeksi dimenzionalnosti integrala su:

$m, n = 0, 1, 2, ...$

<u>Izraz za površinu orubljenu krivuljom $c(t)$ je:</u>

$A = I_0 = I_{0,0} = 1/2 \cdot \Sigma_i(x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i)$

<u>Diferencijalni vektorski umnožak (Greenov teorem)</u>

Zadana je opća parametarska krivulja $c(t)$, koja orubljuje područje površine D. Zadani su vektori:

$\rho_1 = \rho(x, y)$ i $\rho_2 = (\rho + ds)$, $\rho_2 = (x + dx, y + dy)$

Tad je površina trokuta $\Delta(O, T, T')$:

$|dA| = |1/2(\rho_1 \times \rho_2)| = 1/2|\rho \times (\rho + ds)|$

U matričnom obliku je:

$$dA = \frac{1}{2} \cdot \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ x + dx & y + dy & 0 \end{vmatrix}$$

Element površine orubljene diferencijalnim dijelom krivulje ∂D (Greenov teorem):

$dA = 1/2(x(y + dy) - y(x + dx)) = 1/2(xdy - ydx)$

"Diferenciranje po trokutima"

<u>Integral površine područja D orubljenog krivuljom</u>

$A = 1/2 \cdot |\int_{\partial D}(xdy - ydx)|$

IZVOD INTEGRALA MOMENATA POMOĆU DIFERENCIJALNOG VEKTORSKOG UMNOŠKA

(Određeni iz izraza za numeričku integraciju momenata površine, dobivenih iz diskretnog vektorskog umnoška.)

$$M_x = I_{1,0} = 1/6 \cdot \Sigma_i(y_i + y_{i+1}) \cdot (x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i) \to \Sigma_i(y_i + y_{i+1}),\ \lim_{\Delta y \to 0} \to (y + y + dy) \to \cong 2y$$

$$M_y = I_{0,1} = 1/6 \cdot \Sigma_i(x_i + x_{i+1}) \cdot (x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i) \to \Sigma_i(x_i + x_{i+1}),\ \lim_{\Delta x \to 0} \to (x + x + dx) \to \cong 2x$$

$$I_x = I_{2,0} = 1/12 \cdot \Sigma_i(y^2{}_i + y_i y_{i+1} + y^2{}_{i+1}) \cdot (x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i) \to \Sigma_i(y^2{}_i + y_i y_{i+1} + y^2{}_{i+1}),\ \lim_{\Delta y \to 0} \to (y^2 + y(y + dy) + (y + dy)^2) \to \cong 3y^2$$

$$I_y = I_{0,2} = 1/12 \cdot \Sigma_i(x^2{}_i + x_i x_{i+1} + x^2{}_{i+1}) \cdot (x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i) \to \Sigma_i(x^2{}_i + x_i x_{i+1} + x^2{}_{i+1}),\ \lim_{\Delta x \to 0} \to (x^2 + x(x + dx) + (x + dx)^2) \to \cong 3x^2$$

$$I_{xy} = I_{1,1} = 1/24 \cdot \Sigma_i(2x_i y_i + x_i y_{i+1} + x_{i+1} y_i + x_{i+1} y_{i+1}) \cdot (x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i) \to$$

Za $\lim_{\Delta x \to 0}, \lim_{\Delta y \to 0} \to (2x_i y_i + x_i y_{i+1} + x_{i+1} y_i + x_{i+1} y_{i+1}) = (2xy + x(y + dy) + (x + dx)y + (x + dx)(y + dy)) \to \cong 6xy$

OPĆI INTEGRAL SVOJSTAVA POVRŠINE (MOMENTNI OBLIK KRIVULJNOG INTEGRALA GREENOVOG TEOREMA)

$$\mathbf{M_{m,n} = 1/(2 + m + n) \cdot \int_{\partial D} x^n \cdot y^m \cdot (x \cdot dy - y \cdot dx),\ m = n = 0, 1, 2}$$

INTEGRAL POVRŠINE ORUBLJENE KRIVULJOM

$A = |M_{0,0}| = 1/(2 + 0 + 0) \cdot |\int_{\partial D} x^0 \cdot y^0 \cdot (x \cdot dy - y \cdot dx)|$ $\qquad \mathbf{A = |M_{0,0}| = 1/2 \cdot |\int_{\partial D} (x \cdot dy - y \cdot dx)|}$

INTEGRAL HORIZONTALNOG STATIČKOG MOMENTA POVRŠINE ORUBLJENE KRIVULJOM

$M_x = M_{1,0} = 1/(2 + 0 + 1) \cdot \int_{\partial D} x^0 \cdot y^1 \cdot (x \cdot dy - y \cdot dx)$ $\qquad \mathbf{M_x = M_{1,0} = 1/3 \cdot \int_{\partial D} y \cdot (x \cdot dy - y \cdot dx)}$

INTEGRAL VERTIKALNOG STATIČKOG MOMENTA POVRŠINE ORUBLJENE KRIVULJOM

$M_y = M_{0,1} = 1/(2 + 1 + 0) \cdot \int_{\partial D} x^1 \cdot y^0 \cdot (x \cdot dy - y \cdot dx)$ $\qquad \mathbf{M_y = M_{0,1} = 1/3 \cdot \int_{\partial D} x \cdot (x \cdot dy - y \cdot dx)}$

INTEGRAL HORIZONTALNOG MOMENTA TROMOSTI POVRŠINE ORUBLJENE KRIVULJOM

$I_x = M_{2,0} = 1/(2 + 2 + 0) \cdot \int_{\partial D} x^0 \cdot y^2 \cdot (x \cdot dy - y \cdot dx)$ $\qquad \mathbf{I_x = M_{2,0} = 1/4 \cdot \int_{\partial D} y^2 \cdot (x \cdot dy - y \cdot dx)}$

INTEGRAL VERTIKALNOG MOMENTA TROMOSTI POVRŠINE ORUBLJENE KRIVULJOM

$I_y = M_{0,2} = 1/(2 + 0 + 2) \cdot \int_{\partial D} x^2 \cdot y^0 \cdot (x \cdot dy - y \cdot dx)$ $\qquad \mathbf{I_y = M_{0,2} = 1/4 \cdot \int_{\partial D} x^2 \cdot (x \cdot dy - y \cdot dx)}$

INTEGRAL CENTRIFUGALNOG MOMENTA TROMOSTI POVRŠINE ORUBLJENE KRIVULJOM

$I_{xy} = M_{1,1} = 1/(2 + 1 + 1) \cdot \int_{\partial D} x^1 \cdot y^1 \cdot (x \cdot dy - y \cdot dx)$ $\qquad \mathbf{I_{xy} = M_{1,1} = 1/4 \cdot \int_{\partial D} x \cdot y \cdot (x \cdot dy - y \cdot dx)}$

Ban